Limit sets for Fuchsian groups(フックス群の極限集合)

著者	諸澤 俊介
号	1144
発行年	1990
URL	http://hdl.handle.net/10097/25068

氏名・(本籍)	諸澤俊介（もろさわしゅんすけ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第　１１４４　号
学位授与年月日	平成 2 年 3 月 28 日
学位授与の要件	学位規則第５条第１項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 （博士課程）数学専攻
学位論文題目	Limit sets for Fuchsian groups （フックス群の極限集合）
論文審査委員	（主査） 教授 黒田　正　　教授 小田忠雄 教授 小竹　武

論文目次

論文内容要旨

序

本論文の目的は，フックス群の極限点を分類し，それのなす集合の性質を調べ，そのフックス群から得られるリーマン面の特徴付け，及びそのフックス群に付随するポアンカレ級数の収束指数の評価を試みることである。

フックス群とは一次分数変換のなす群の離散部分群でその各元がひとつの円板Dを不変にするもののことである。Dの境界 ∂D をそのフックス群の主円と呼ぶ。フックス群はDに不連続に作用しているので，Dをそのフックス群の不連続領域と呼ぶ。D内の任意の点のそのフックス群による軌道は主円にのみ集積点を持つ。この集積点をそのフックス群の極限点と呼び，極限点全体の集合をそのフックス群の極限集合と呼ぶ。極限集合が主円と一致するとき，そのフックス群は第一種，然らざるときは第二種と呼ばれる。

フックス群なる概念はポアンカレ（1882）がフックスによる微分方程式の研究をより発展させるために導入した。ポアンカレはその不連続領域Dを双曲型空間ととらえ，Dを不変とする一次分数変換の作用を双曲型空間の剛体運動と見なした。この考え方はフックス群の研究においては極めて重要である。さらにポアンカレは必ずしも主円をもたない一次分数変換のなす群の離散部分群をも考えた。これがいわゆるクライン群である。フックス群，クライン群の研究は一意化の問題，タイヒミュラー空間論へと進展する。

フックス群Gの局所有限な基本領域はDをそのフックス群Gで割って得られる商空間，いわゆるリーマン面，D/Gと同一視できる。この基本領域を用いて，Dをモザイク式に埋めたときに，双曲型空間Dにおける測地線がどのようにモザイクを横切っていくかということに興味がもたれた。これは，リーマン面上の単位接束の中で測地的流れが稠密であるか否かという問題となった。まず，アルティン，ミルベルグ（1924）がモジュラー群によって得られるリーマン面上に測地的流れが稠密となる半測地線の存在を示し，さらにケーベ（1930）が有限生成第一種フックス群について同様のことを示した。この半測地線の挙動を調べることは，フックス群Gの立場で考えると，Dでの半測地線の端点である極限点の性質を調べることにほかならない。D/G上の測地的流れがD/G上の単位接束で稠密となるようなDでの半測地線の端点を可遷な点と呼ぶ。こうして極限集合が研究対象となった。ミルベルグ（1931）は第一種フックス群の非可遷な点の集合のルベーグ測度が零となることを示し，さらにホップ（1937）は有限生成第一種フックス群のその極限集合への作用が測度可遷性をもつことを証明した。またヘドルンド（1936）はホロ円的流れについて可遷性を考えた。これらは力学系と深い関係をもつ研究である。

一方，赤座は1960年代からショットキー群と呼ばれる特殊なクライン群のポアンカレ級数の収束指数とその極限集合のハウスドルフ次元の関係について調べはじめた。彼の研究の動機はショットキー群の極限集合の大きさの評価を用いて，バーンサイド予想の否定的な解答を与え

ることであった。極限集合の大きさについてはアルフォース（1964）が有限生成クライン群の極限集合の2次元測度は零であろうという予想をたてたが，この問題はまだ解かれていない。サリバン（1979）はクライン群の収束指数とその極限集合のある部分集合のハウスドルフ次元の関係を導き，さらにそれらと測地的流れのエルゴード性との関係を示した。

第一章での考察対象は主にフックス群の可遷な点である。著者と仲田（1985）による特殊なフックス群の可遷な点の集合についての結果への別証明を与えると同時に，より一般的な結果を証明する。

第二章では，無限生成フックス群の極限点の分類を試みる。ビアドンとマスキット（1974）はフックス群の近似点と呼ばれる極限点を考えて，フックス群が有限生成であることと，その極限集合が近似点と放物的変換の固定点だけからなることが同値であることを示した。可遷な点は近似点である。したがって無限生成フックス群を考えれば，いつくかの興味深い性質をもつ極限点が現われる。

第三章はでは，前章での極限点の分類で得られた集合をより詳しく考察する。このとき，念頭に置くのは，収束型のフックス群である。フックス群が収束型であることと，その商空間として得られるリーマン面の上にグリーン函数が存在することとは同値である。このグリーン函数を不連続領域Dへ持ち上げると，∂D上ほとんどいたる所でその函数の半径に沿っての極限は零となる。したがって収束型のフックス群の極限点を考える際，ほとんどすべての点は理想境界の持ち上げと見なされる。主円上にある種の測度が存在することと，商空間であるリーマン面の上に正値調和函数が存在することは同値である。その測度とフックス群の作用の関係を見ることにより理想境界の様子を調べたい。

以下，順を追って本論文の内容を説明する。

一章　フックス群の可遷な点の一性質　Dを複素平面の単位円板とし，Dを不変とする一次分数変換のなす群をMöb(D)で表わす。Möb(D)の元で∂Dの上にふたつの固定点をもつものを双曲的変換，∂Dの上にただひとつの固定点をもつものを放物的変換，D内にただひとつの固定点をもつものを楕円的変換と呼ぶ。双曲的変換の2つの固定点を結ぶ∂Dに直交する円弧をこの変換の軸と呼ぶ。GをDに作用するフックス群とする。Gの可遷な点の集合をT_Gと表す。またGの双曲的変換の固定点の集合，放物的変換の固定点の集合をそれぞれH_G, P_Gとする。

定理. GとΓをDに作用するフックス群とする。GをΓの指数有限の部分群とすれば，$T_\Gamma = T_G$, $H_\Gamma = H_G$, $P_\Gamma = P_G$が成立する。

証明には双曲的変換の軸の性質を用いる。この定理の系として次の事実が得られる。

系。Gを有限生成第一種フックス群とし，FをGの凸基本多角形とする。$N = \{g(F) \mid g \in G\}$とし，$\gamma$はMöb(D)の元で$\gamma(N) = N$を満たすものとする。$\xi$がGの可遷な点であれば，$\gamma(\xi)$も同様である。$\xi$を双曲的変換（又は放物的変換）の固定点とすると$\gamma(\xi)$も同様である。

これは著者と仲田の得た結果を含んでいる。

第二章　無限生成フックス群の極限点

G を D に作用するフックス群とし g を G の元とする。$|g'(\xi)|$ の G に関する上極限が発散するような ∂D の点 ξ の集合を L_1,正値有界となるような ∂D の点 ξ の集合を L_2,そして零となるような ∂D の点 ξ の集合を L_3 とする。G が有限生成のときは，L_1 は G の近似点だけからなり，G が放物的変換を含むならば，L_2 は G の放物的変換の固定点だけからなり，G が第二種ならば，L_3 は G の通常点だけからなる。しかし，G が無限生成のときには，事情は異なってくる。$\rho(\cdot,\cdot)$ で D 内の 2 点間の双曲的距離を表わし，G の楕円的変換の固定点の集合を D′とする。D＼D′の点 w に対して，恒等写像以外のすべての g について $\rho(w, z)<\rho(w, g(z))$ を満たす点 z の集合 Fw は G の基本領域となり，これを w を中心とする G のディリクレ基本領域と呼ぶ。∂D 上の点 ξ の D の内側から接する円を点 ξ でのホロ円と呼び，ξ をそのホロ円の無限遠点と呼ぶ。D 内の点 z を通り，ξ を無限遠点とするホロ円のユークリッド半径を $r(\xi, z)$ とかく。$r(\xi, g(z))$ の G に関する下限 M が正値であり，かつどの $r(\xi, g(z))$ も M に等しくないとき，ξ を G の（z に関する）ガーネット点と呼ぶ。L_1 の点 ξ について $r(\xi, g(z))$ の G に関する下限は零であり，L_3 の点 ξ について $r(\xi, g(z))$ の G に関する下限 M は正値であり，かつ G のある元 g_0が存在して，$r(\xi, g_0(z))=M$ となる。このことから次の定理が得られる。

定理．L_1 と L_3 の点は G のガーネット点ではない。さらに ξ が L_1 の点であれば，D＼D′の各点 w に対して ξ は $\overline{F_w}$ に含まれない。ξ が L_3 の点であれば，D＼D′の各点 w に対して ξ は $\overline{F_w}$ に含まれない。ξ が L_3 の点であれば，D＼D′の各点 w に対して，G のある元 g が存在して ξ は $\overline{g(F_w)}$ に含まれる。

Möb(D) の元がふたつの ∂D に直交する円に関する反転の合成として表わせることを利用すると，極限点が G のガーネット点となる十分条件が求まる。G から恒等写像を除いた集合を G′とする。このとき，次の定理が成り立つ。

定理。G を D に作用するフックス群とする。$|g'(\xi)|$ の G′に関する上限を k とし，G′のすべての g に対して，$|g'(\xi)|<k$ であるとする。$k>1$ であれば，ξ は原点 0 に関する G のガーネット点である。$k\leqq 1$ のとき，G の部分列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $|g'_n(\xi)|$ が k に収束し，かつ $g_n(\xi)$ が ξ と異なる点に収束するものがあるとき，ξ は G のガーネット点である。

定理。G を D に作用するフックス群とする。G の極限点 ξ は $\overline{F_0}$ に含まれるとし，B を G の元 g で $|g'(\xi)|=1$ をみたすものの集合とする。B の部分列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ と ∂D 上の点 η で $g_n(\xi)$ が η に収束しかつ B のすべての元 g に対し，$g(\xi)\neq\eta$ となるものがあるとき ξ は G のガーネット点である。

これらの事実から容易にガーネット点をもつフックス群の例を作ることができる。

第三章　フックス群の極限集合の不変部分集合

GをDに作用するフックス群とする。μ を ∂D 上の有限ボレル測度とする。μ によるポアソン積分で得られた正値調和函数がG－不変であるとき，μ は性質（*）を持つという。前章で定義した集合 L_1, L_2, L_3 について次の定理を証明することができる。

定理.（1）L_1, L_2, L_3 はG－不変可測集合である。

（2）μ を L_1 上の性質（*）を持つ有限ボレル測度とすれば，L_1 は μ に関して保存的である。

（3）L_2 のルベーグ測度は零である。

（4）μ を L_3 上の性質（*）を持つ有限ボレル測度とすれば，L_3 は μ に関して消散的である。

リーマン面D/G上の正値調和函数と性質（*）を持つ有限ボレル測度は一対一に対応する。特に μ が特異測度であるとき，μ から得られるG－不変正値調和函数は非有界となる。特異測度の特別なものとして点測度を考える。

命題. Gをフックス群で有限型とする。性質（*）をもつ有限ボレル測度が ξ で点測度をもつのは，ξ が放物型変換の固定点であるか又はGのすべての元gについての無限和 $\Sigma|g'(\xi)|$ が収束するかの何れかの場合である。またこの逆も成立する。

この証明は実際に点測度を構成することによって行われる。さらに，

定理. μ を L_3 上の測度で性質（*）をもつとする。μ に関する L_3 のほとんどすべての点 ξ は，Gのすべての元gについての無限和 $\Sigma|g'(\xi)|$ が収束する。

これは L_3 が μ に関して消散的であることから得られる。

さらに，L_1, L_2, L_3 を細かくわける。無限遠点を固定しない一次分数変換gに対して，$|g'(z)|=1$ をみたすzの集合をgの等長円と呼ぶ。等長円の半径，中心をそれぞれ $r(g)$, $c(g)$ で表わして，∂D 上の点 ξ について $r(g)^k/|\xi-c(g)|$ のGについての上極限が正値有界となるものの集合を $L(k)$ とかく。$k>2$ 又は，$k<0$ であれば $L(k)$ は空集合である。$L(2)$ は近似点の集合である。$2\geqq k>1$ のとき $L(k)$ は L_1 に含まれ，$1>k\geqq 0$ のとき $L(k)$ は L_3 に含まれる。また $L(1)=L_2$ であることも容易にわかる。さらに $L(k)$ はG－不変可測集合である。Gのすべての元gについての無限和 $\Sigma r(g)^{2\delta}$ が収束するような δ に下限を $\delta(G)$ とかき，Gの収束指数と呼ぶ。集合Aのハウスドルフ次元をH-dim（A）とかく。

定理. GをDに作用するフックス群とする。$k>0$ に対して

$$\text{H-dim}(L(k))\leqq 2\delta(G)/k$$

特に $k=2$ のとき，すなわちフックス群Gの近似点の集合については $\text{H-dim}(L(2))\leqq\delta(G)$ が成立することは以前から知られていた。

∂D 上のルベーグ測度をmで表わす。∂D 上のG－不変可測集合Aで $m(A)>0$ なるものが不可分集合であるとは，AのG－不変可測部分集合Cで $m(A)>m(C)>0$ となるものが存在しないときをいう。不可分集合とリーマン面D/G上の最小有界調和函数は一対一に対応する。O_{HBN}（$N\in\mathbf{N}$）でその上に高々N個の線形独立な有界調和函数をもつリーマン面の族を表わ

す。$O_{HBN} \setminus O_{HB(N-1)}$（N≧２）に属するリーマン面はその上にちょうどＮ個の線形独立な最小有界調和函数をもつ。

命題．リーマン面 D/G が O_{HBN} に属するとする。このとき，$m(L_1) = 2\pi$ となる。

定理．リーマン面 D/G が O_{HB} に属するとすれば，$2\delta(G) \geqq k > 1$ を満たす k で $m(L(k)) = 2\pi$ となるものが存在する。

定理．リーマン面 D/G がその上に最小有界調和函数をもつとすると，$\delta(G) > 1/2$ である。

これらの事実の証明は L_1 が保存的であることと，$L(k)$ のハウスドルフ次元と G の収束指数に関する不等式から得られる。

論文審査の結果の要旨

フックス群なる概念は常微分方程式の研究にともなって，ポアンカレによって導入された概念であるが，例えば種数が2以上のリーマン面の普遍被覆空間をこれと等角同値な複素平面上の単位開円板とみなすとき，この普遍被覆空間に作用する被覆変換群は単位開円板に作用するフックス群とみなすことができる。そしてフックス群の極限点の集合である極限集合はそのフックス群，したがってそのフックス群に対応するリーマン面のいくつかの重要な性質を色濃く反映しているので，フックス群の極限集合は複素解析における重要な研究対象の一つになっている。

フックス群の極限点としては，そのフックス群に対応するリーマン面上のある種の測地的流れの研究にともなって導入されたそのフックス群の可遷点とよばれるものがある。本論文では，まず複素平面の単位開円板に作用する2つのフックス群を考え，その一方が他方の指数の有限な部分群になっている場合，それら2つのフックス群の可遷点の集合は一致することが示されている。これはリーマン面上の測地的流れの力学系の研究の見地からも興味ある結果である。ついで本論文ではフックス群の極限点を3種のクラスに分類する。従来なされている分類では，有限生成フックス群の極限点の分類が主であって，無限生成フックス群に対して現れるガーネット点についての研究は少なく，ガーネット点をもつフックス群の例も僅かしか知られていなかった。本論文による極限点の分類とその各クラスの詳細な解析によれば，無限生成フックス群の極限点の性質がかなり明確となり，ガーネット点をもつフックス群の構成も比較的容易になされるようになっている。さらに収束型フックス群について，その極限点の上記の分類による各クラスの極限点が作る極限集合の3つの部分集合の測度論的性質を調べ，それら部分集合のハウスドルフ次元を考えているフックス群の収束指数によって評価し，それらの応用として，そのフックス群に対応するリーマン面の上の有界調和函数が作る線形空間の諸性質を明らかにしている。これらの結果はリーマン面の理論の立場から甚だ興味深い。

以上本論文でえられている諸結果はフックス群およびリーマン面の研究に重要な寄与をしたものであり，理学博士の学位論文として合格である。